

Рівненський міський виконавчий комітет
Управління освіти



НА
В
Ч
А
Л
Ь
Н
О

В
И
Х
О
В
Н
И
Й

К
О
М
П
Л
Е
К
С

Не стандартні методи розв'язання окремих типів математичних рівнянь



Підготувала
вчитель
математики вищої
кваліфікаційної
категорії,
вчитель-методист
Загородюк
Вікторія Юріївна

10784.36
5x
2.715372
9 ÷ 1

Рівне 2010

Зміст

1. Алгебраїчні рівняння вищих степенів.
 - 1.1 Розв'язання відносно ірраціональних коефіцієнтів.
 - 1.2 Застосування методу Феррарі.
 - 1.3 Метод розв'язку одного із типів кубічних рівнянь.
2. Ірраціональні рівняння.
 - 2.1 ОДЗ може розв'язати рівняння.
 - 2.2 Застосування формул скороченого множення.
 - 2.3 Метод домноження на спряжений вираз.
 - 2.4 Метод виділення повного квадрату.
 - 2.5 Метод зведення до системи рівнянь.
 - 2.6 Розв'язок рівнянь, які містять три кубічних корені.
3. Розв'язання рівнянь із застосуванням похідних пропорції.
4. Рівняння з цілою та дробовою частиною.
5. Рівняння Ейлера.

... Числа не керують світом,
Але дають можливість
Зрозуміти, як керується
Світ...

Йоган Вольфганг Гете

Всі значні технічні досягнення – від будівництва до вивільнення атомної енергії, від надзвичайної авіації до космічних польотів та врешті-решт пізнання таємниць Всесвіту неможливе без міркувань, а точніше математичних міркувань та створення математичної моделі.

Аналіз математичної моделі та пошук розв'язків до поставленої задачі зводиться до розв'язання математичних рівнянь системи або сукупності рівнянь. Пропонується розглянути нестандартні методи розв'язання математичних рівнянь, які стандартними способами розв'язати складно.

1. Алгебраїчні рівняння записуються у загальному вигляді так:

$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$ - алгебраїчне рівняння n -го степеня

$A_0 \neq 0, n \geq 1$

A_i - коефіцієнт рівняння

n – степінь рівняння

Якщо всі коефіцієнти A_i є параметрами, то рівняння називається загальним алгебраїчним рівнянням відносно x степеня n .

Метод розв'язання алгебраїчних рівнянь відносно ірраціональних коефіцієнтів.

№ 1

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

Введемо заміну $a = \sqrt{3}$

Розв'яжемо рівняння відносно a

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x(x^3 - 1) = 0$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4x(x^3 - 1) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm |2x + 1|}{2} = (x^2 + x + 1) \cup (x^2 - x)$$

Повертаємось до заміни $a = \sqrt{3}$, маємо систему:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = \sqrt{3} \Rightarrow D = 4\sqrt{3} - 3 \\ x^2 - x = \sqrt{3} \Rightarrow D = 4\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2} \\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} + 1}}{2} \end{cases}$$

Як бачимо дане рівняння розв'язується відносно ірраціональних коефіцієнтів, а не як ми звикли розв'язувати відносно невідомої змінної x .

Аналогічним чином розв'язуються приведенні нижче рівняння.

№ 2

$$x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0$$

Заміна $a = \sqrt{7}$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{7}}}{2}$$

Відповідь:

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4\sqrt{7}}}{2}$$

№ 3

$$x^3 - (3\sqrt{5} - 1)x^2 + 45 = 0$$

№ 4

$$(x^2 - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)(4x - \sqrt{3} - 1) = 0$$

№ 5

$$x^4 + x^2 - 2\sqrt{5}x^2 - 2\sqrt{5} + 2x + 5 = 0$$

Узагальнюючи даний метод розв'язання рівнянь, задачу можна сформулювати в загальному вигляді:

При яких значеннях a рівняння не має коренів, або має 1, 2, 3 або 4 корені?

№ 6

$$x^4 + x^2 - 2x^2a - 2a + 2x + a^2 = 0$$

Роз'яжемо рівняння відносно a :

$$a^2 - a(2x^2 + 2) + x^4 + x^2 + 2x = 0$$

$$D = 4x^4 + 8x^2 + 4 - 4x^4 - 4x^2 - 8x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$$

$$\sqrt{D} = 2|x - 1|$$

$$a_{1,2} = \frac{2(x^2 - 1) \pm 2(x - 1)}{2}$$

$$a_{1,2} = x^2 + 1 \pm 2(x - 1) = (x^2 + x) \cap (x^2 - x + 2)$$

Тепер аналізуємо:

$$\begin{cases} x^2 + x = a_1 \\ x^2 - x + 2 = a_2 \end{cases}$$

Кількість розв'язків рівняння знайдемо графічно

$y_1 = x^2 + x = x(x + 1)$ - квадратична функція, графік якої - парабола, вітки якої напрямлені угору.

$$x_b = -\frac{1}{2}$$

вершина параболы в точке с координатами $(-0.5; -0.25)$

$$y_b = -\frac{1}{4}$$

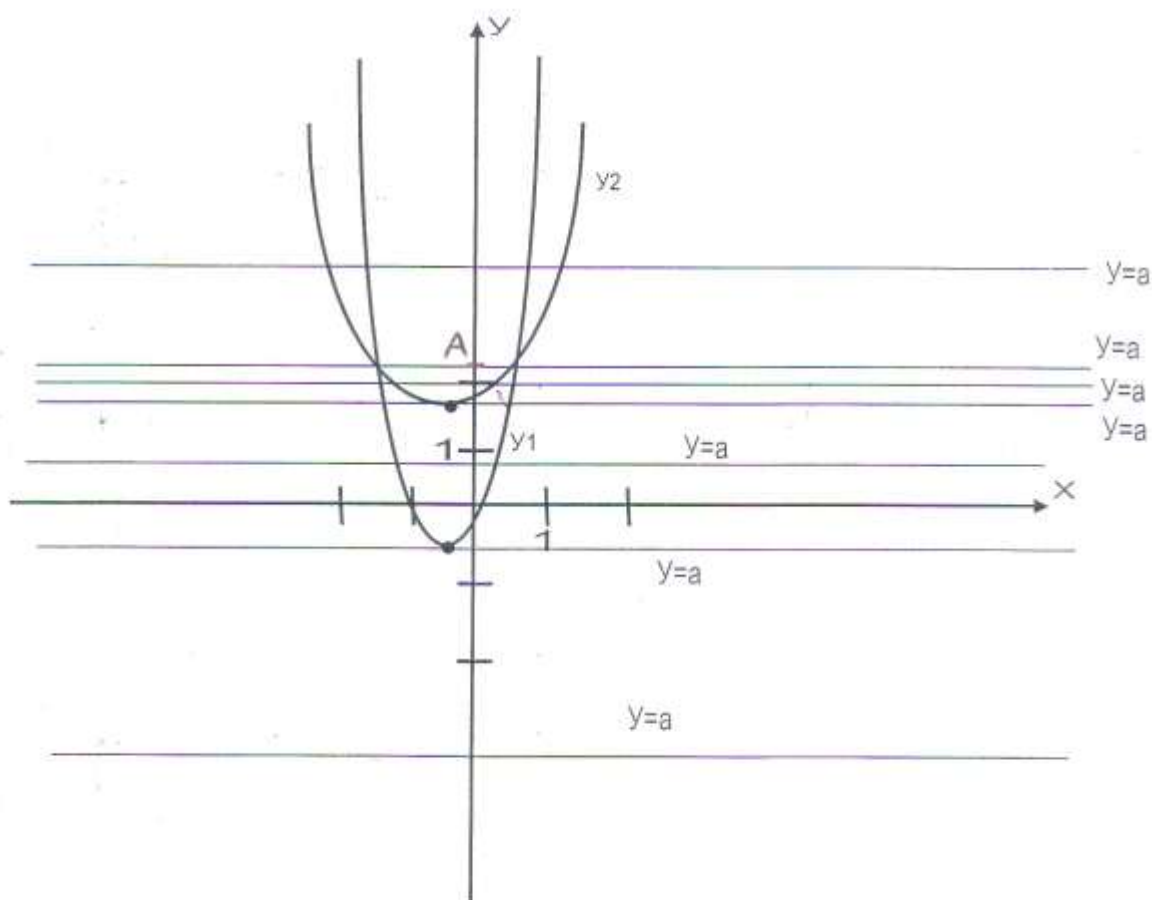
$$y_2 = x^2 - x + 2$$

$$x_b = \frac{1}{2}$$

$$y_b = 1\frac{3}{4}$$

Як ми бачимо дана квадратична функція є параболою, напрямлена вітками вгору, її $D < 0$ тому вона не має точок перетину з віссю OX . Її вершина має координати $(0.5; 1.75)$.

$y_3 = a$ - графіком є пряма паралельна OX ;



В залежності від a рівняння матиме ту чи іншу кількість коренів.

Як бачимо:

- 1) якщо $a < -0.5$ то рівняння немає коренів
- 2) якщо $a = -0.5$ то рівняння має лише один корінь
- 3) якщо $-0.5 < a < 1.75$ то рівняння має 2 корені
- 4) якщо $a = 1.75$ то рівняння має 3 корені

- 5) якщо $a > 1.75$, але $a \neq A$ або просто $a > A$ де A – ордината точок перетину графіків функцій y_1 та y_2 то рівняння матиме 4 розв'язки, які будуть залежати від конкретного значення a , і їх можна обчислити, підставивши a з даного проміжку, у нашу систему рівнянь.
- 6) Якщо $y = a = A$ то рівняння матиме 2 розв'язки.

Знайдемо A :

$$x^2 + x = x^2 - x + 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$y(1) = 1 + 1 = 2$$

Отже, якщо $a = 2$ то рівняння має 2 розв'язки.

Відповідь:

- 1) $a < -0.5 \rightarrow x \in \emptyset$
- 2) $a = -0.5 \rightarrow$ рівняння має 1 розв'язок
- 3) $a \in (-0.5; 1.75) \cup \{2\}$ рівняння має 2 розв'язки
- 4) $a = 1.75 \rightarrow$ рівняння має 3 розв'язки
- 5) $a \in (1.75; 2) \cup (2; +\infty)$ рівняння має 4 розв'язки

1.2 Метод Феррарі

Щоб даний квадратний тричлен

$$ax^2 + bx + c = 0$$

можна було представити як квадрат двочлена, необхідно і достатньо, щоб його дискримінант був рівний 0.

№ 1

$$x^4 + 4x^3 - 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 1 = 0 \quad \text{перетворимо таким чином:}$$

$\Downarrow$

$$(x^2 + 2x)^2 = 4x^2 + 1$$

Проведемо тепер з цим рівнянням такі маніпуляції:

$$(x^2 + 2x)^2 + 2a(x^2 + 2x) + a^2 = 4x^2 + 1 + 2a(x^2 + 2x) + a^2$$

$\Downarrow$

$$(x^2 + 2x + a)^2 = 4x^2 + 1 + 2a(x^2 + 2x) + a^2$$

За нашим твердженням дискримінант правої частини дорівнює нулю.

Запишемо це:

$$D = 0 = 16a^2 - 4(4 + 2a)(a^2 + 1) =$$

$$= 16a^2 - 16a^2 - 16 - 8a^3 - 8a =$$

$$= -8a^3 - 8a - 16 = 0$$

$\Downarrow$

$$a^3 + a + 2 = 0$$

$$a = -1 - \text{єдиний корінь}$$

Ми знайшли a , тепер підставимо його у наше рівняння:

$$(x^2 + 2x - 1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$(x^2 + 2x - 1)^2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2$$

перенісши, отримаємо різницю квадратів

$$(x^2 + 2x - \sqrt{2}x + \sqrt{2})(x^2 + 2x - \sqrt{2}x - \sqrt{2}) = 0$$

Залишилось прирівняти кожен вираз в дужках до нуля

Розв'язавши отримаємо:

$$x_{1,2} = \frac{-2 - \sqrt{2} \pm \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = \frac{-2 - \sqrt{2} \pm \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

№ 2

$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5 = 0$$

1.3 Кубічне рівняння

Розглянемо цікавий тип кубічних рівнянь виду:

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (a + b + c)x = abc$$

Доведемо, що a, b, c – корені цього рівняння.

▲ Нехай $x = a$, тоді:

$$a^3 - (a + b + c)a^2 + (a + b + c)a = abc$$

$$a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc = abc$$

Одержимо правильну рівність:

$$abc = abc$$

Аналогічно для b і c . ▲

№1

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$x^3 - (1 + 2 + 3)x^2 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (1 \cdot 2 \cdot 3)$$

Отже коренями є 1, 2, 3.

Відповідь: $x \in \{1; 2; 3\}$.

№2

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$$

№3

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

Відповідь: $x \in \{1; 3; 5\}$.

2. Розв'язання ірраціональних рівнянь.

Ірраціональними називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня. Для рівносильного перетворення ірраціональних рівнянь в загальному випадку використовують наступні теореми:

Теорема 1:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}$$

Теорема 2:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, n \in N \\ f(x) = (g(x))^{2n}, n \in N \end{cases}$$

2.1 Відшукування ОДЗ може розв'язати рівняння за лічені хвилини.

№1

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x-7}$$

Як правило учні, розв'язуючи такі рівняння намагаються підносити обидві частини до квадрату. Насправді достатньо перевірити *Область Допустимих Значень*:

ОДЗ: $x \leq 4$ та $x \geq 7 \Rightarrow x \in \emptyset$ - Розв'язок в один рядок.

№2

$$\sqrt{x-30} + \sqrt{2x+4} = 8$$

Як правило учні стараються тут же підносити обидві частини до квадрату, такі розв'язки дуже громіздкі, та забирають багато дорогоцінного часу...

Я пропоную такий розв'язок:

ОДЗ: $x \geq 30$ тобто $x \in [30; +\infty)$

Враховуючи монотонність зростаючих функцій, з'ясовуємо що рівняння має єдиний корінь. Його коренями є крайня точка проміжку 30. Перевіряємо це, одержали вірну числову рівність, наше твердження вірне. Як бачимо даний розв'язок не є громіздким.

№3

$$\sqrt{-1-x} = \sqrt[3]{x-5}$$

Учні підносять обидві частини до 6 степеня...

Але ви вже здогадалися, що є зручніший метод, ось він:

Запишемо для цього рівняння О. Д. З. та обмеження.

ОДЗ: $x \leq -1$

Обмеження: $x \geq 5$

Маємо: $x \in \emptyset$

2.2 Розв'язання рівнянь із застосування формул скороченого множення.

№1

Ось іще рівняння:

$$\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3 \quad \uparrow^3$$

Застосовуємо формулу:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

Маємо:

$$\sqrt[3]{(8-x)(x+1)} = 0$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 7$$

Відповідь: $x \in \{0; 7\}$

№2

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-7} = 2$$

Відповідь: $x = 7$

№3

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$$

Відповідь: $x = 0$

№4

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2}$$

Відповідь: $x = 0$

№5

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{9x+1}$$

Відповідь: $x \in \{0; -1; -\frac{1}{10}\}$

2.3 Метод домножування на спряжений вираз.

№1

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8$$

Домножимо дане рівняння на вираз спряжений до лівої частини рівняння:

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8 \quad | * (\sqrt{x+4} - \sqrt{20+x})$$

Розглянемо систему рівнянь, перше рівняння якої результат домноження вихідного рівняння на спряжений вираз, а друге – саме рівняння

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{20+x} = -2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8 \end{cases} \quad \downarrow '+ \quad \text{ОДЗ: } x \in (-4; +\infty)$$

$$2\sqrt{x+4} = 6$$

$$x+4 = 9$$

$$x = 5$$

Виконаємо перевірку, отримаємо:

Відповідь: $x = 5$.

№2

$$\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$$

Відповідь: $x = 8$

№3

$$\sqrt{x+7} = 9 - \sqrt{x-2}$$

Відповідь: $x = 18$

№4

$$\sqrt{4-x} = 3 - \sqrt{5+x}$$

Відповідь: $x \in \{-5; 4\}$

№5

$$\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x-2}$$

Відповідь: $x = 3$

2.4 Метод виділення повного квадрату.

№1

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-11-6\sqrt{x-2}} = 2 \quad \text{ОДЗ: } x > 2$$

$$|\sqrt{x-2}-1| + |\sqrt{x-2}-3| = 2$$

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$|y-1| + |y-3| = 2$$

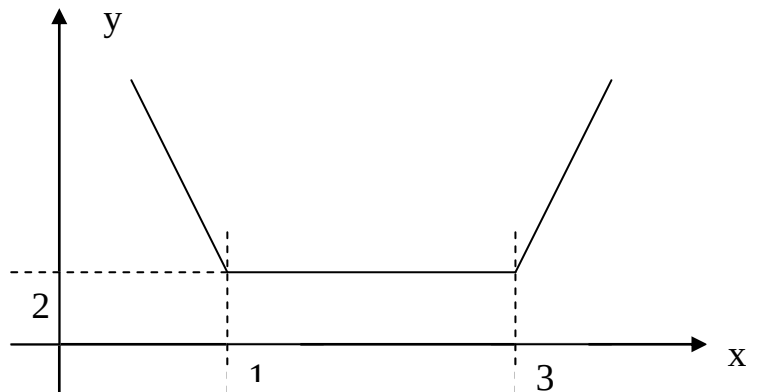
$$y \in [1; 3]$$

$$1 \leq \sqrt{x-2} \leq 3$$

$$1 \leq x-2 \leq 9$$

$$3 \leq x \leq 11$$

$$x \in [3; 11]$$



Відповідь: $x \in [3; 11]$

№2

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Відповідь: $x \in [5; 10]$

№3

$$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$$

Відповідь: $x = 2$

2.5 Метод зведення ірраціонального рівняння до системи рівнянь (застосування комбінованих методів).

№1

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$$

$$\sqrt[3]{2-x} = a \quad \text{зробили заміну;}$$

$$\sqrt{x-1} = b$$

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1 & \Leftarrow \\ & \Uparrow \\ a + b = 1 \Rightarrow & b = 1 - a \end{cases}$$

Отримали:

$$a^3 + a^2 - 2a = 0$$

$\Downarrow$

$$a \in \{0; 1; -2\}$$

Відповідь: $a \in \{0; 1; -2\}$.

№2

$$\sqrt{x-4} = 1 - \sqrt{x+1}$$

Відповідь: $x = 3$

№3

$$\sqrt{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$$

Відповідь: $x \in \{1; 2; 10\}$

2.6 Ірраціональні рівняння, який містить три кубічних корені.

Теорія:

$$\sqrt[3]{f_1(x)} + \sqrt[3]{f_2(x)} + \sqrt[3]{f_3(x)} = 0 \quad (1)$$

Нехай

$$\sqrt[3]{f_1(x)} = y_1$$

$$\sqrt[3]{f_2(x)} = y_2$$

$$\sqrt[3]{f_3(x)} = y_3$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд:

$$y_1 + y_2 = -y_3 \quad (2)$$

Піднесемо обидві частини рівності (2) до кубу

$$y_1^3 + y_2^3 + 3y_1y_2(-y_3) = -y_3^3$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 3y_1y_2y_3$$

$$(y_1 + y_2 + y_3)((y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_1)^2) = 0$$

Добуток дорівнює нулю коли хоча б один множник рівний нулю:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 = y_2 = y_3 \end{cases}$$

Два останніх рівняння не еквівалентні, тому необхідно робити перевірку на наявність сторонніх коренів.

Щоб застосувати формулу:

$$(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x))^3 = 27 f_1(x) f_2(x) f_3(x)$$

Робимо, вказаним чином, перевірку наявності сторонніх коренів:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

Нехай $x = a$ тоді якщо

$$f_1(a) = f_3(a)$$

Тоді ***a*** сторонній корінь.

№1

$$\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{1-3x} = 0$$

$$2x = x - 1$$

$x = -1$ - *сторонніх коренів немає*

$$x(x-1)(1-3x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

№2

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{3x+1}$$

$$\text{Відповідь: } x \in \{0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\}$$

№3

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2-3x}$$

$$\text{Відповідь: } x = 0$$

3. Розв'язки рівнянь із застосуванням похідних пропорцій.

Виведемо вірні рівності для даної пропорції

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0 \quad (1)$$

Якщо до обох частин рівності додати 1 або -1 то отримаємо відповідно вірні рівності (2) і (3). При діленні рівності (2) на (3) або навпаки отримаємо рівності (4) і (5).

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (2)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (4)$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (3)$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \quad (5)$$

Використовуємо коли

$$\frac{a}{b} \neq \pm 1, \quad \frac{c}{d} \neq \pm 1$$

Рівності (2), (3), (4), (5) є похідними пропорції. При розв'язанні рівнянь із застосуванням похідних пропорцій варто користуватися наступними твердженнями:

T1

Якщо ні при якому x $\frac{a}{b} \neq 1, \frac{c}{d} \neq 1$ то застосовуємо (4).

T2

Якщо ні при якому x $\frac{a}{b} \neq -1, \frac{c}{d} \neq -1$ то застосовуємо (5).

№1

$$\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}}$$

Застосувавши похідну пропорції маємо

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5}}$$

Далі стандартним способом, піднісши обидві частини рівняння до квадрату та розв'язавши маємо відповідь $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$

№2

$$\frac{2x^2 - x - 2 + x\sqrt{x^2 - x - 2}}{2x^2 - x - 2 - x\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{9}{7}$$

$$a = 2x^2 - x - 2$$

$$c + d = 9$$

$$b = x\sqrt{x^2 - x - 2}$$

$c - d = 7$ вертаємося до пропорції

$$\frac{2x^2 - x - 2}{x\sqrt{x^2 - x - 2}} = 8$$

$$\frac{x^2 - x - 2 + x^2}{x\sqrt{x^2 - x - 2}} = 8$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 - x - 2})^2 + x^2}{2x\sqrt{x^2 - x - 2}} = 4$$

Використовуючи похідну пропорції (4)

$$a = (\sqrt{x^2 - x - 2})^2 + x^2 \quad c = 4$$

$$b = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2} \quad d = 1$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)^2}{(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \frac{3}{5} \quad \Bigg| \quad \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = -\frac{3}{5}$$

вертаємось від похідної пропорції (4) до вихідної пропорції(1)

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \pm \frac{5}{3}$$

Відповідь: $x = 3$

№3

$$\frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 1}}{\sqrt{x+14} + \sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 1}}{\sqrt{x+14} - \sqrt{x+2}}$$

4. Рівняння з цілою та дробовою частиною.

$[x]$ - ціла частина числа x ;

Ціла частина – найбільше ціле число, яке не перевищує x

$\{x\}$ - дробова частина числа;

$\{x\} = x - [x]$;

№1

$$[x^3] = [3x + 2] + \{x + 2003\} - (\text{Всеукраїнська олімпіада 2003 рік})$$

З умови задачі видно:

$$\{x + 2003\} = 0, \text{ бо } [...] \neq \{...\} \Rightarrow x - \text{ціле число}$$

Маємо:

$$[x^3] = [3x + 2]$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Далі рівняння можна розв'язати різними методами (схема Горнера, формула Кордано і. т. д.);

$$(x+1)(x^2 - x + 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

Відповідь: $x \in \{-1; 2\}$

№2

$$[x^{2005}] + [x^{2004}] + \dots + [x^2] + [x] = \{x\} - 1;$$

З умови видно, що $\{x\} = 0$, тобто x - ціле;

$$[x^{2005}] + \dots + [x] + 1 = 0;$$

Розкладемо:

$$(x+1)(x^{2004} - \dots + 1) = 0$$

Але:

$$x^{2004} + \dots + 1 \neq 0$$

Тому:

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Ми застосовуємо таку формулу:

$$x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)(x^{2k} - x^{2k-1}y + x^{2k-2}y^2 - \dots - xy^{2k-1} + y^{2k})$$

Ось до вашої уваги ще кілька подібних формул:

$$x^{2k} - y^{2k} = (x+y)(x^{2k-1} - x^{2k-2}y + x^{2k-3}y^2 - \dots + xy^{2k-2} + y^{2k-1})$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-2}x + y^{n-1})$$

№3

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$$

Розв'язок:

$$\frac{[x]^2 + 1}{[x]} = \frac{\{x\}^2 + 1}{\{x\}}$$

$$([x]^2 + 1)\{x\} = [x](\{x\}^2 + 1)$$

$$[x]^2\{x\} + \{x\} - [x]\{x\}^2 - [x] = 0$$

$$([x] - \{x\})([x]\{x\} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} [x] - \{x\} = 0 \Rightarrow [x] = \{x\} \\ [x]\{x\} = 1 \Rightarrow \{x\} = 1/[x], [x] = \{x\} \end{cases}$$

- неможливо, тому розглянемо 2 рівняння:

$\Downarrow$

$$x = n + \frac{1}{n}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Відповідь: } x = n + \frac{1}{n}.$$

5. Рівняння Ейлера

А ось на останок хочу представити Вам рівняння яке в свій час запропонував Леонард Ейлер.

Знайти всі дійсні раціональні корені рівняння

$$x^y = y^x$$

Як можна здогадатися, це рівняння має безліч коренів, тож виведемо загальну формулу для їх обчислення.

Розв'язок:

Нехай:

$$y = ax$$

Тепер маємо:

$$x^{ax} = a^x x^x$$

поділимо на x^x

$$x^{x(a-1)} = a^x$$

знайдемо з кожного виразу $\sqrt[x]{}$

$$x^{a-1} = a^x$$

$\Downarrow$

$$x = \sqrt[a-1]{a^x}$$

$$x = a^{\frac{x}{a-1}}$$

тоді:

$$y = ax = a^{\frac{ax}{a-1}}$$

Припустимо n - натуральне число

$$n = \frac{1}{a-1}$$

$\Downarrow$

$$a = \frac{1}{n} + 1 = \frac{1+n}{n}$$

Тоді маємо:

$$x = \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$$

$$y = \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n+1}$$

Відповідь:

Ми вивели загальну формулу для обчислення x та y

$$x = \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$$

$$y = \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n+1}$$

Ось такий чудовий розв'язок має на перший погляд складне рівняння.

Використана література

1. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев «Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов».
2. П. Ф. Фільчакова «Довідник з елементарної математики».
3. И. А. Кушнир «Математика для поступающих в ВУЗЫ».
4. А. В. Кругликов, С. А. Плакса «Пособие для довузовской подготовки по математике» Київ 1999.
5. «Сборник задач под редакцией М. И. Сканави».
6. Підшивка газет та журналів „Математика в школах України”.
7. А. Г. Конфорович «Визначні математичні задачі».
8. Збірник Науково-Популярних статей «У світі Математики», 1977 р.